Université Moulay Tahar de Saïda

1ère Année Master Mathématiques – Master AM

S1 – FS1 –Correction – Examen –Janvier 2020

Exercice 1 *(10 Points)*

(1) *A partir du théorème de GRAM-SCHMIDT, nous pouvons construire des polynômes orthogonaux dans l'espace $\mathbb{R}[X]$. Plusieurs classes de fonctions polynômiales ont été obtenu, nous pouvons voir par exemple les polynômes orthogonaux suivants:*
..... (01 point)
—- Polynômes de Legendre: Soit $I = [-1, 1]$, et l'éspace préhilbertien H muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$.
Le procédé d'ortogonalisation de Gram-Schmidt donne les polynômes de Legendre.
—– Polynômes Hermite: Soit $I = \mathbb{R}$, et H muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)e^{t^2}dt$.
Le procédé d'ortogonalisation de Gram-Schmidt donne les polynômes de Hermite.
..... (0 point)
—– polynômes de Laguerre: Soit $I = \mathbb{R}_+$, et H muni du produit scalaire $< f, g >= \int_{0}^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$.
Le procédé d'ortogonalisation de Gram-Schmidt donne les polynômes de Laguerre.
Ces polynômes orthogonaux sont considérés comme solutions des EDO du second ordre ordre.

(2) *Les fonctions de type hypergéométrique sont des fonctions en séries numérique de la forme $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$; conduit à la relation de récurrence suivante (où nous supposons que $c \notin \mathbb{Z}$):*

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+a)(n+b)}{(n+c)(n+1)}.$$

Elles sont des solutions de L'EDO de Gauss **..... (02 points)**

$$t(1-t)u'' + (c - (a+b+1)t)u' - abu = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(3) *Soient $m \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$, et P le Polynôme du type hypergéométrique:*

$$P(-m, a, b; t) = \sum_{n=0}^{m} (-1)^n \frac{m!}{n!(m-n)!} \frac{(a)_n}{(b)_n} t^n.$$

Nous pouvons faire le calcul et montrer que $Q(t) = P\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t\right)$ est solution de l'EDO de Gauss; **..... (02 points)**
$u(t) + (3-t)u'(t) + (2t - 2t^2)u''(t) = 0$. *En effet; Q est de classe $C^2(\mathbb{R})$ et*
$Q(t) + (3-t)Q'(t) + (2t - 2t^2)Q''(t) = 0$.

(4) *Il nous reste de chercher une autre solution $v(t)$ fonctionnelement indépendantes avec $P\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t\right)$. La solution générale devient alors:*
$u(t) = C_1 P\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t\right) + C_2 v(t)$. *avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.*
..... (1.5 points)
Nous savons qu'il y a plusieurs méthodes pour trouver la fonction v. Nous pouvons parler de la méthode d'OSTOGRADSKI-LIOUVILLE: Si y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation différentielle $y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0$ sur un segment $[\alpha, \beta]$, et si l'on connaît la fonction y_1, alors la deuxième solution y_2 vérifie **..... (01 point)**

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int a(x)dx}}{y_1^2(x)} dx.$$

(5) *On utilise la méthode d'OSTOGRADSKI-LIOUVILLE pour trouver v comme série du type hypergéométrique. et enfin, la solution générale devient alors:*
$u(t) = C_1 P\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; t\right) + C_2 v(t)$. **..... (1.5 points)**

Exercice 2 *(10 Points) On a $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt;\ x \geq 0$,*
et $\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt;\ x, y \in]0, +\infty[$.

(1) *Les fonctions spéciales sont liées à des questions de physique mathématique. Le rôle principale des fonctions spéciales apparait dans les EDO du second ordre, En effet, plusieurs classes des fonctions spéciales sont conisdérés comme solutions des EDO du second ordre.* **..... (02 points)**
Ces fonctions s'écrivent neccesairement en fonction de Γ et β.

(2) *La fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$. En effet; elle est régulière et la dérivation par parties nous donne* **..... (02 points)**

$$\frac{d}{dx}\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln t dt.$$

(3) *En utilisant la relation $\beta(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,* **..... (02 points)**
nous pouvons montrer les relations suivantes:

$$x\Gamma(x) = \Gamma(1+x), \quad et \quad x\beta(x, y+1) = y\beta(x+1, y).$$

(4) *Le changement de variabe $t = \sin^2\theta;\ \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, nous donne* **..... (01.5 points)**

$$\beta(x, y) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{2x-1}\theta)(\cos^{2y-1}\theta) d\theta.$$

et, en déduire que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. **..... (0.5 point)**

(5) *Maintenant le changement de variable $t = \frac{s}{1+s};\ s \in [0, 1]$, nous donne* **..... (01.5 points)**

$$\beta(x, y) = \int_0^1 \frac{s^{x-1} + s^{y-1}}{(1+s)^{x+y}} ds.$$

et, en déduire que **..... (0.5 points)**
$\beta(x, 1-x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x-n}.$