Université Dr. T. Moulay de Saida	**Mesure et intégration**
Département de Mathématiques	**S5 : janvier 2020**
$3^{ème}$ Année Licence Maths	

◄ Examen Final ►

Exercice-01 :Les questions de cet exercice sont indépendantes

1. Soit $A = \bigcup_{n\geq 0}[n, n + \frac{1}{2^n}[$. Calculer $\lambda(A)$. (λ est la mesure de Lebesgue)
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\{x\})$
3. Soit $x_0, x_1, x_2, \ldots \in \mathbb{R}$, calculer $\lambda(\bigcup_{n\geq 0}\{x_n\})$. En déduire que $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$.
4. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{nx}\right) dx$

Exercice-02 :
Soient E et F des ensembles. Pour $A \in P(E)$ (resp. $P(F)$) on note $T(\mathcal{A})$ la tribu de E (resp. F) engendrée par $\mathcal{A}$.
Soit f une application de E dans F.
On note f^{-1} l'application de $\mathcal{P}(F)$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par, pour $B \in \mathcal{P}(F)$,

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \quad t.q. \quad f(x) \in B\}$$

1. Soit S une tribu sur F. On pose $T_{F,S} = \{f^{-1}(B); B \in S\}$. Montrer que $T_{F,S}$ est une tribu sur E (c'est la tribu image réciproque de S par f).
2. Soit T une tribu sur E. On pose $S_{f,T} = \{B \subset F; f^{-1}(B) \in T\}$. Montrer que $S_{f,T}$ est une tribu sur F (c'est la tribu image directe de T par f).
3. Soit C un ensemble de parties de F. On pose $C_f = \{f^{-1}(B); B \in C\}$ et $S = T(C)$. Montrer que $T(C_f)$ est la tribu image réciproque de S par f , c'est-à-dire que $T(C_f) = T_{f;S}$ avec la notation de la première question.
   indication : On pourra montrer d'abord que $T(C_f) \subset T_{F,S}$. Puis, pour montrer que $T_{F,S} \subset T(C_f)$, montrer que la tribu image de $T(C_f)$ par f contient C.

Exercice-03 :
Soit (E, T) un espace mesurable et $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures sur T. On suppose que $m_{n+1}(A) \geq m_n(A)$ pour tout $A \in T$ et tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $m(A) = \sup\{m_n(A), n \in \mathbb{N}\}$ pour $A \in T$.

1. Soit $(a_{n,p})_{n,p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ et $(a_p)_{p\in\mathbb{N}} \subset \overline{\mathbb{R}}_+$ t.q. $a_{n+1,p} \geq a_{n,p}$, pour tout $n, p \in \mathbb{N}$, et $a_{n,p} \to a_p$ quand $n \to +\infty$, pour tout $p \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \to \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \quad (\text{dans } \overline{\mathbb{R}}_+) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

   [On pourra utiliser le fait que

$$\sum_{p=0}^{N} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{+\infty} a_{n,p} \leq \sum_{p=0}^{+\infty} a_p]$$

2. Montrer que m est une mesure.
3. Soit $f \in \mathcal{E}_+(E, T)$. Montrer que $\int f dm = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\int f dm_n)$.
4. Soit $f \in \mathcal{M}_+(E, T)$.
   (a) Montrer que $(\int f dm_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante majorée par $\int f dm$.
   (b) Montrer que $\int f dm_n \to \int f dm$ lorqsue $n \to +\infty$.