Université **Dr. Moulay Tahar** de Saïda — **Le** 19/01/2020
Faculté: Des sciences, — **Département:** De Mathématiques
Troisièma année Licence en Mathématique — **Matière:** Optimisation sans contrainte

Corrigé de l'examen Final

Exercice 1. *: **(06 points)***

Soit a une forme bilinéaire symétrique de $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$.
a) On applique le théorème de représentation de Riesz à l'application linéaire $a(u,.) : v \to a(u,v)$, *pour u fixé. On définit ainsi une forme linéaire* A_u*; on voit facilement que* $u \to Au$ *est linéaire :* $A_u = Au$
b) le gradient et la dérivée seconde (hessien) de la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^n$ *par:*

$$J(v) = \frac{1}{2}(Au, v) - (b, v), \text{ où } b \in \mathbb{R}^n \text{ est fixé.}$$

- $\nabla J(v) = Av - b$ *et* $D^2 J(v) = A$.

c) La condition sur A, la fonction J est-elle convexe si A est semi-définie positive et strictement convexe si A est définie positive.

Exercice 2. (**08pts**)

Soit la fonction f définit par

$$f(x,y) = (y-1)\ln(y-1) - \ln(x) + x^2 - xy + 2y^2 - 7y - \frac{3}{2}x + 3.$$

1. *le domaine de définition* D_f *de f :*$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 1\}$.
2. D_f *est convexe et ouvert car c'est l'intersection de deux demi plans ouverts.*
3. *La fonction* φ *est définie sur* $]0,+\infty[$. *Pour tout* $u \in]0,+\infty[$, *on a* $\varphi'(u) = u \times \frac{1}{u} + \ln u$ *qui est une fonction croissante,* φ *est donc ur convexe sur* $]0,+\infty[$.
4. *Par décomposition d'une fonction convexe par une fonction affine,* $(x,y) \to (y-1)\ln(y-1) = \varphi(y-1)$ *est convexe sur* D_f *car* $\left(4ac - b^2 = 4 \times 1 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0 \text{ et } a=1 > 0\right)$.*Enfin la fonction* $-\ln$ *étant convexe; la fonction f est une somme de fonction convexes; elle est par conséquent convexe sur* D_f.
5. *On calcule, pour tout* $(x,y) \in D_f$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x} + 2x - y - \frac{3}{2}$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (y-1) \times \frac{1}{y-1} + \ln(y-1) - x + 4y - 7 = \ln(y-1) - x + 4y - 6$$

on vérifie que $\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = 0$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = 0, (2,2)$ *est donc un point critiquede f.*

6. *La fonction f étant convexe sur D_f, elle admet un minimum global en* $(2,2)$.

7. *La fonction f n'admet pas de maximum global sur D_f: en effet pour tout $x>0$* $f(x,2)=x^2-\frac{7}{2}x+11-\ln x$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x,2)=+\infty$ *(par croissances comparées).*

Exercice 3. $(06)\,pts$

1. $$f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$$

On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y)=(2x-2,4y).$$

On cherche les points critiques comme solutions du système

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=0\\ \partial_y f(x,y)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x-2=0\\ 4y=0\end{cases}$$

La seule solution du système est donnée par le point $P=(1,0)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

La matrice hessienne est constante :

$$H_f(1,0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace de l'hessienne :
$det\ H_f(1,0)=8>0, tr\ (H_f(1,0))=6>0$
Dès que les déterminant (resp. la trace) est le produit (resp. la somme) des deux valeurs propres de $H_f(1,0)$*, on peut conclure que les valeurs propres de* $H_f(1,0)$ *sont strictement positives. Cela c'est equivalent à dire que* $H_f(1,0)$*est semi-définie positive.*
Par consequence Pest un point de minimum pour f.

2. $f(x,y)=2x^3-6xy+3y^2$

On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y)=(6x^2-6y,-6x+6y)$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases}6x^2-6y=0\\ -6x+6y=0\end{cases}$$

Les deux points critiques sont P_1 *= (1, 1) et* P_0 *= (0, 0).*
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour P_0 on trouve

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcul le determinantet la trace

$$\det H_f(0,0) = -36 < 0,$$

Dès que les déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie (ni négative ni positive) et donc P_0 est un point -selle.
Pour P_1 on trouve :

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace :det H_f (1, 1) = 36 > 0, tr(H_f (1, 1)) = 18 > 0
Dès que les déterminant et la trace sont > 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont strictement positives. Donc P_1 est un point de minimum pour f.

3. $f(x,y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = \left(e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2 + 2x\right), e^{x-y}\left(-x^2 + 2y^2 - 4y\right)\right)$$

Puisque l'exponentielle est strictement > 0 on cherche les points critiques comme solution du système:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Les deux points critiques sont $P_1 = (-4,-2)$ et $P_0 = (0,0)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2) & e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) \\ e^{x-y}(-x^2 - 2y^2 - 2x - 4y) & e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4) \end{pmatrix}$$

Pour P_0on trouve

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0,0) = -8 < 0,$$

Dès que les déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie (ni négative ni positive) et donc P_0 est un point -selle. Pour P_1 on trouve :

$$H_f(-4,-2) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace :

$$\det H_f(-4,-2) = 8e^{-4} > 0, tr(H_f(-4,-2)) = -18e^{-2} < 0$$

Dès que les déterminant est > 0et la trace est < 0les deux valeurs propres de l'hessienne sont strictement négatives. Donc P_1 est un point de maximum pour f.